

摘要

材料的杨氏模量、切变模量以及断裂强度等宏观量都能反映出物质微观结构的特点。20 世纪 30 年代，人们从物质结构理论出发，计算出的断裂强度值比实际值大几个数量级。这个重大矛盾迫使科学家提出了位错理论来解释实验现象。后来人们在电子显微镜下观察到了位错的形成和运动，证实了这种理论。科学的发展反复证明了实践是检验真理的唯一标准。

第一部分 实验目的

通过这个实验，掌握：

- 用扭摆测量金属丝切变模量；
- 学习尽量设法避免测量那些较难测准的物理量，从而提高实验精度的设计思想。

需测量的物理量

- 钢丝直径 d (mm)
- 钢丝长度 L (cm)
- 铁圈内外径 r_{in}/r_{out} (cm)
- 无铁圈扭摆周期 T_0 (s)
- 含铁圈扭摆周期 T_1 (s)
- 铁圈质量 m (g)

第二部分 实验方法

实验原理

根据剪切胡克定律，在弹性限度内，且应变 γ 正比于切应力 τ ：

$$\tau = G\gamma \quad (1)$$

其中 G 为切变模量。

通过对发生形变的钢丝绳做受力分析，可求出钢丝绳恢复力矩 M ：

$$M = \frac{\pi}{2}GR^4\frac{\varphi}{L} \quad (2)$$

其中 R 为钢丝绳半径， φ 为总扭转角， L 为钢丝绳总长度。

由此，求切边模量问题就转化为了求钢丝恢复力矩的问题。为此，在钢丝下端悬挂一圆盘，它可绕中心线自由扭动，成为扭摆。摆扭过的角度 φ 正比于所受的扭力矩：

$$M = D\varphi \quad (3)$$

其中 D 为钢丝的扭转模量，由此可以得出：

$$G = \frac{2DL}{\pi R^4} \quad (4)$$

因此需要测算出钢丝的扭转模量。

由转动定律：

$$M = I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (5)$$

带入 (3) 式：

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I_0}\varphi = 0 \quad (6)$$

这是一个简谐运动方程，其角频率 $\omega = \frac{D}{I_0}$ ，周期：

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad (7)$$

但是由于测量扭摆的转动惯量 I_0 较为困难，所以可将一个金属环对称地置于圆盘上。设环的质量为 m ，内外半径分别为 r_{in} 和 r_{out} ，转动惯量为：

$$I_1 = \frac{1}{2}m(r_{in}^2 + r_{out}^2) \quad (8)$$

周期：

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}} \quad (9)$$

由 (8)、(9) 式可推出：

$$I_0 = I_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (10)$$

\Rightarrow

$$D = \frac{4\pi^2}{T_0^2} I_0 = 4\pi^2 \frac{I_1}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{2\pi^2 m (r_{in}^2 + r_{out}^2)}{T_1^2 - T_0^2} \quad (11)$$

\Rightarrow

$$G = \frac{4\pi L m (r_{in}^2 + r_{out}^2)}{R^4 (T_1^2 - T_0^2)} \quad (12)$$

实验器材

扭摆装置（底座、钢丝、圆盘、金属圈）、秒表、游标卡尺、钢卷尺、螺旋测微仪。

第三部分 实验结果与数据分析

测量记录

1. 钢丝直径 d (mm) 游标卡尺 0 误差: 0.002 mm

上			中			下		
0.776	0.778	0.777	0.774	0.774	0.772	0.776	0.773	0.775

2. 钢丝长度 L (cm)

43.27	43.29	43.30
-------	-------	-------

3. 铁圈质量 m (g)

575.9

4. 金属圈内径 d_{in} (cm)

8.398	8.408	8.398
-------	-------	-------

5. 金属圈外径 d_{out} (cm)

10.400	10.402	10.402
--------	--------	--------

6. 无铁圈扭摆周期 $45T_0$ (s)

99.56	99.41	99.55
-------	-------	-------

7. 含铁圈扭摆周期 $45T_1$ (s)

169.98	169.84	169.99
--------	--------	--------

分析与讨论

I. 扭转模量 D 与切变模量 G

钢丝直径 d 的平均值:

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{0.774 + 0.776 + 0.775 + \cdots + 0.774 + 0.771 + 0.773}{9} \text{ mm} = 0.773 \text{ mm}$$

钢丝直径 d 的标准差:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(0.774 - 0.773)^2 + \cdots + (0.773 - 0.773)^2}{9-1}} \text{ mm} \\ &= 0.0019365 \text{ mm} \end{aligned}$$

钢丝直径 d 的B类不确定度:

$$\Delta_{B,d} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{0.01^2 + 0.005^2} \text{ mm} = 0.01118 \text{ mm}$$

钢丝直径 d 的展伸不确定度:

$$\begin{aligned} U_{d,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,d}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(2.31 \times \frac{0.0019365}{\sqrt{9}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.01118}{3}\right)^2} \text{ mm} \\ &= 7.4551 \times 10^{-3} \text{ mm}, P = 0.95 \end{aligned}$$

金属圈内径 d_{in} 的平均值:

$$\bar{d}_{in} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_{in_k} = \frac{8.398 + 8.408 + 8.398}{3} = 84.013 \text{ mm}$$

金属圈内径 d_{in} 的标准差:

$$\begin{aligned} \sigma_{d_{in}} &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (d_{in_k} - \bar{d}_{in})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(83.98 - 84.013)^2 + (84.08 - 84.013)^2 + (84.98 - 84.013)^2}{2}} \\ &= 0.6858 \text{ mm} \end{aligned}$$

金属圈内径 d_{in} 的 B 类不确定度:

$$\Delta_{B,d_{in}} = 0.02 \text{ mm}$$

金属圈内径 d_{in} 的展伸不确定度:

$$\begin{aligned} U_{d_{in},P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_{d_{in}}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,d_{in}}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(4.30 \times \frac{0.0658}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.02}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= 0.1650 \text{ mm}, P = 0.95 \end{aligned}$$

金属圈外径 d_{out} 的平均值:

$$\bar{d}_{out} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_{out_k} = \frac{10.400 + 10.402 + 10.402}{3} = 104.013 \text{ mm}$$

金属圈外径 d_{out} 的标准差:

$$\begin{aligned} \sigma_{d_{out}} &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (d_{out_k} - \bar{d}_{out})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(104.00 - 104.013)^2 + (104.02 - 104.013)^2 + (104.02 - 104.013)^2}{2}} \\ &= 0.01155 \text{ mm} \end{aligned}$$

金属圈外径 d_{out} 的 B 类不确定度:

$$\Delta_{B,d_{out}} = 0.02mm$$

金属圈外径 d_{out} 的展伸不确定度:

$$\begin{aligned} U_{d_{out},P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_{d_{out}}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,d_{out}}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(4.30 \times \frac{0.01155}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.02}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= 3.6530 \times 10^{-2} mm, P = 0.95 \end{aligned}$$

钢丝长度 L 的平均值:

$$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k = \frac{43.27 + 43.29 + 43.30}{3} = 43.278 \text{ cm}$$

钢丝长度 L 的标准差:

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (L_k - \bar{L})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(43.27 - 43.278)^2 + (43.29 - 43.278)^2 + (43.30 - 43.278)^2}{2}} \\ &= 0.0186 \text{ cm} \end{aligned}$$

钢丝长度 L 的 B 类不确定度:

$$\Delta_{B,L} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{0.1^2 + 0.05^2} \text{ cm} = 0.1118 \text{ cm}$$

钢丝长度 L 的展伸不确定度:

$$\begin{aligned} U_{L,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_L}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,L}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(4.30 \times \frac{0.0186}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.1118}{3}\right)^2} \\ &= 8.9865 \times 10^{-2} \text{ cm}, P = 0.95 \end{aligned}$$

圆环质量 m 的平均值:

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = \frac{575.9}{1} \text{ g} = 575.9 \text{ g}$$

圆环质量 m 的 B 类不确定度:

$$\Delta_{B,m} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{1^2 + 0.5^2} \text{ g} = 1.118 \text{ g}$$

圆环质量 m 的展伸不确定度:

$$U_m = k_P \frac{\Delta_{B,m}}{C} = 1.96 \times \frac{1.118}{3} \text{ g} = 0.73045 \text{ g}, P = 0.95$$

周期 T_0 的平均值:

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_{0k} = \frac{2.212 + 2.209 + 2.212}{3} = 2.211 \text{ s}$$

周期 T_0 的标准差:

$$\begin{aligned} \sigma_{T_0} &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (T_{0k} - \bar{T}_0)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(2.212 - 2.211)^2 + (2.209 - 2.211)^2 + (2.209 - 2.211)^2}{2}} \\ &= 1.7321 \times 10^{-3} \text{ s} \end{aligned}$$

周期 T_0 的 B 类不确定度:

$$\Delta_{B,T_0} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{0.0005^2 + 0.01^2} \text{ s} = 0.010012 \text{ s}$$

周期 T_0 的展伸不确定度:

$$\begin{aligned} U_{T_0,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_{T_0}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,T_0}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(4.30 \times \frac{1.7321 \times 10^{-3}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.010012}{3}\right)^2} \\ &= 7.8280 \times 10^{-3} \text{ s}, P = 0.95 \end{aligned}$$

周期 T_1 的平均值:

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_{1k} = \frac{3.777 + 3.773 + 3.778}{3} = 3.776 \text{ s}$$

周期 T_1 的标准差:

$$\begin{aligned} \sigma_{T_1} &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (T_{1k} - \bar{T}_1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(3.777 - 3.776)^2 + (3.773 - 3.776)^2 + (3.778 - 3.776)^2}{2}} \\ &= 2.6458 \times 10^{-3} \text{ s} \end{aligned}$$

周期 T_1 的 B 类不确定度:

$$\Delta_{B,T_1} = \sqrt{\Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2} = \sqrt{0.0005^2 + 0.01^2} \text{ s} = 0.010012 \text{ s}$$

周期 T_1 的展伸不确定度:

$$\begin{aligned} U_{T_1,P} &= \sqrt{\left(t_P \frac{\sigma_{T_1}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(k_P \frac{\Delta_{B,T_1}}{C}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(4.30 \times \frac{2.6458 \times 10^{-3}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1.96 \times \frac{0.010012}{3}\right)^2} \\ &= 9.2699 \times 10^{-3} \text{ s}, P = 0.95 \end{aligned}$$

扭转模量 D :

$$\begin{aligned} D &= \frac{\pi^2 m (d_{in}^2 + d_{out}^2)}{-2T_0^2 + 2T_1^2} \\ &= \frac{\pi^2 \times 0.5759 (0.084013^2 + 0.10401^2)}{-2 \times 2.2113^2 + 2 \times 3.7764^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= 5.4214 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

扭转模量 D 的延伸不确定度:

$$\begin{aligned} U_{D,P} &= \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial m} U_{m,P}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial d_{in}} U_{d_{in},P}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial d_{out}} U_{d_{out},P}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial T_0} U_{T_0,P}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial T_1} U_{T_1,P}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi^2 (d_{in}^2 + d_{out}^2)}{-2T_0^2 + 2T_1^2} U_{m,P}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4\pi^2 m T_0 (d_{in}^2 + d_{out}^2)}{(-2T_0^2 + 2T_1^2)^2} U_{T_0,P}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi^2 \times (0.084013^2 + 0.10401^2)}{-2 \times 2.2113^2 + 2 \times 3.7764^2} \times 0.00073045\right)^2 + \dots} \\ &= 2.5198 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

扭转模量 D 的最终结果:

$$D = (5.42 \pm 0.025) \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

切变模量 G :

$$\begin{aligned} G &= \frac{16\pi L m (d_{in}^2 + d_{out}^2)}{d^4 (-T_0^2 + T_1^2)} \\ &= \frac{16\pi \times 0.43287 \times 0.5759 (0.084013^2 + 0.10401^2)}{0.000773^4 \times (-2.2113^2 + 3.7764^2)} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2) \\ &= 6.6949 \times 10^{10} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2) \end{aligned}$$

切变模量 G 的延伸不确定度:

$$\begin{aligned} U_{G,P} &= \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial L} U_{L,P}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial G}{\partial T_0} U_{T_0,P}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{16\pi m (d_{in}^2 + d_{out}^2)}{d^4 (-T_0^2 + T_1^2)} U_{L,P}\right)^2 + \dots + \left(\frac{32\pi L m T_0 (d_{in}^2 + d_{out}^2)}{d^4 (-T_0^2 + T_1^2)^2} U_{T_0,P}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{16 \times \pi \times 0.5759 \times (0.084013^2 + 0.10401^2)}{0.000773^4 \times (-2.211^2 + 3.776^2)} \times 0.00089865\right)^2 + \dots} \\ &= 2.5832 \times 10^9 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2) \end{aligned}$$

切变模量最终结果

$$G = (6.69 \pm 0.26) \times 10^{10} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$$

II. 误差分析

该实验的误差来源主要是：

1. 钢丝不直——有些部位发生过非弹性形变；
2. 扭摆摆动时存在竖直平面上的摆动位移；
3. 钢丝不同位置半径不均匀；
4. 圆盘可能有倾斜。

思考题

1. 本实验是否满足 $\gamma \ll 1$ 的条件？

答：由 $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varphi}{L}$ 可知：

$$\gamma_{max} = \frac{d\varphi_{max}}{2L} = 5.23 \times 10^{-3}$$

满足 $\gamma \ll 1$ 。

2. 为提高测量精度，本实验在设计上作了哪些安排？在具体测量时又要注意什么？

答：**设计上**，设法避免测量较难测准的物理量。由于难以直接测量摆的转动惯量，利用摆上放置金属环前后的周期关系，转为测量金属环的质量与内外径以求得测量金属环的转动惯量；**操作上**，利用估算法，求得测量周期的数目，利用累计法，降低周期的相对误差；测量前，调整扭摆装置，使钢丝与作为扭摆的圆盘面垂直。

致谢

感谢大物实验中心以及韦先涛、蔡俊、浦其荣老师