线性代数与解析几何

———学习笔记

中国科学技术大学
彭煜峰

2023 年 8 月

前言

目录

第一章　向量与复数

本章重点在理解“线性”这一概念，掌握向量的数量积、向量积、混合积三种运算。

§1.1　向量的线性运算

§1.1.1　向量及其表示

向量是来自于物理的概念，原意味“有大小有方向的量”，在线性代数中被推广。向量的表示方式有三种：有向线段、起始点字母、小写加粗字母。

§1.1.2　向量的线性运算

向量的加法应遵循平行四边形定则以及三角形法则，具有如下性质：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \quad \text{（交换律）}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} \quad \text{（结合律）}$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \quad \text{（存在零元）}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \quad \text{（存在负项）}$$

向量的数乘遵循线性性，具有如下性质：

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a} \quad \text{（数乘结合律）}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

另有“单位向量”这一概念：

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

向量的加法与数乘运算统称为向量的**线性运算**。

§1.1.3 向量的共线与共面

如果一组向量都平行于某一直线，则它们共线；平行于某一平面，则共面。

命题 1.1.1 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = 0$$

且实数 λ, μ 不全为零。

命题 1.1.2 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c} = 0$$

且实数 λ, μ, ν 不全为零。

由以上两个命题（证明略）可以推广出**线性组合**的定义：

定义 1.1.1 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 为一组向量，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为一组数，称

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$$

为向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 的**线性组合**。

定义 1.1.2 一组向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关，则存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ，使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

反之，不是线性相关的一组向量称为**线性无关**，对于线性无关的一组向量，上式成立当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 。

本节提出了“线性相关”这一概念，它描述的其实是向量空间的维数关系。用能够理解的三维空间来举例，当三个向量共面时我们说它们是线性相关的，此时这三个向量所张成的空间其实只是一个平面，也就是二维空间，因此虽然我们有三个向量，但是却只能表示二维空间中的内容；反之，若三个向量不共面（例如三维直角坐标系的坐标向量），则我们能够用这三个向量来表示三维空间中的所有向量，此时，这三个向量就张成了一个三维空间。

§1.2 坐标系

§1.2.1 仿射坐标系

我们知道在三维空间中，我们可以利用直角坐标系来表示空间中的所有向量，一直以来我们都认为它是显然的，事实上能够这样做是有着充足的理论依据的，其根本就是线性无关的向量可以作为**基向量**来表示其他一般向量。

显然，两两垂直的直角坐标向量组满足线性无关这一条件，能够作为基向量，本节将对此进行推广，说明只要是线性无关的向量组，就可以作为基向量，不一定需要互相垂直，如此形成的坐标系被称为**仿射坐标系**。

定义 1.2.1 三维空间中任意三个有序的不共面的向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 称为空间（三维）的一组**基**，对于空间（三维）中的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$ 若

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i$$

则称 (x_1, x_2, x_3) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 下的**仿射坐标**或简称**坐标**。

在此定义下，我们就建立起了仿射坐标系，类比直角坐标系，也有着丰富的应用场景。

§1.2.2 向量的坐标运算

在建立好坐标系后（直角坐标系或仿射坐标系），我们就可以把向量表示成一组数，向量的加法和数乘运算就转化成了坐标运算。

设 $\boldsymbol{a} = (x_1, x_2, x_3)$，$\boldsymbol{b} = (y_1, y_2, y_3)$，则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) + (y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= (x_1 + y_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (x_2 + y_2)\,\boldsymbol{e}_2 + (x_3 + y_3)\,\boldsymbol{e}_3 \\
&= \boldsymbol{c} \\
\lambda\boldsymbol{a} &= \lambda\,(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= \lambda x_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda x_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda x_3\boldsymbol{e}_3 \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{c} = ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), (x_3 + y_3))$

§1.2.3 直角坐标系

直角坐标系即在仿射坐标系的基础上要求基向量**两两垂直**，通常将它们表示为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 。

由于直角坐标系的特殊性，我们在直角坐标系下可以很方便地计算向量的模、夹角等信息。

设在 $[O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$ 下的一个向量 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ ，则

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的夹角分别为 α, β, γ 则 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**。

方向余弦由如下图解：

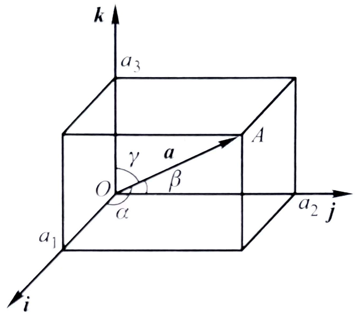

图 1.1: 方向余弦

由上图可以推出：

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}\right)$$

从而

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

§1.3 向量的数量积

§1.3.1 数量积的定义与性质

数量积这一概念来自于物理中的做功。

定义 1.3.1 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**为一个**实数**，它等于两个向量的模与两向量夹角的余弦值的乘积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ，如果向量夹角为 θ ，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

数量积也称为**内积**。

对于向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 以及实数 λ 我们有：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \quad \text{（交换律）}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \quad \text{（结合律）}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \geqslant 0\text{，等号成立当且仅当}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \quad \text{（正定性）}$$

§1.3.2 直角坐标系下数量积的计算

在 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 下，我们可以将向量表示为一组数，且有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0\end{aligned}$$

给定两个向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$（这里用基向量的线性组合来表示向量）则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}$$

同时我们还可以得到

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$$

其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角。

数量积的几何意义有很多，除了做功以外，它还可以用来表示向量的投影，在空间解析几何中有很多的应用。除此之外，线性代数中对于欧式空间的研究也利用了数量积的特性，通过定义数量积，使得空间中抽象的向量有了长度和夹角的概念，也就是说线性空间在内积下有了度量，我们称有度量的线性空间为欧氏空间。

§1.4 向量的向量积

§1.4.1 向量积的定义与性质

向量积在在物理中有着非常多的应用，在研究质点在非惯性系下的运动时常常涉及科里奥利力、惯性离心力的计算，都要用到向量积，也被称为**外积**。

定义 1.4.1 两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的**向量积** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一个**向量**，它的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直，且使得 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成**右手系**；它的模长等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，即 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角。

这里我们发现，两个向量的向量积的模是向量形成的平行四边形的面积，但由于向量积是一个向量，是有方向的量，因此我们说两个向量的向量积是这两个向量形成的平行四边形的有向面积。

向量积具有以下性质

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$
$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\quad\text{（右分配律）}$$

§1.4.2　直角坐标系下的向量积的计算

在 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 下，我们可以将向量表示为一组数，且有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0,\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

给定两个向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$ 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\,\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\,\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\,\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

为了便于记忆，我们可以将两个向量的外积借用行列式来计算：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

向量的内外积应当对比着记忆，关键点在于向量内积得到的是一个数量，外积得到的是一个向量。

§1.5　向量的混合积

§1.5.1　混合积的定义

给定三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ ，称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**混合积**，显然它是一个**数量**。

以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积 S 乘以高 h（图 1.2），即 $V=Sh$ 。由向量积的定义知 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ ；另一方面，设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 φ ，则有 $|h|=|\boldsymbol{c}|\,|\cos\varphi|$ ，于是

$$V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\,|\cos\varphi|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$$

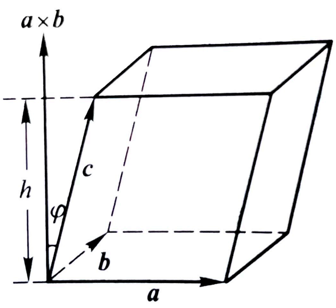

图 1.2: 向量的混合积

注意到当 φ 为锐角时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成右手系，$V=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；当 φ 为钝角时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成左手系，$V=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，因此混合积的**几何意义**应为以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的**有向体积**。

又由于乘积顺序轮换不会改变手系，因此

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

另外，除轮换外的次序变换会改变手系，因此需要变号

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}$$

此外，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中含有任意两个平行向量时，混合积为零

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$$

§1.5.2 直角坐标系下混合积的计算

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 则类似向量内积的计算，我们也可以用行列式来运算混合积，即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

命题 1.5.1 三个向量线性相关当且仅当其混合积为零。

到这里我们可以和后边行列式的内容进行一个关联，我们发现混合积其实就是一个三阶行列式，因此三阶行列式的性质可以套用在混合积中。我们知道，对于行列式，任意两行交换位置需要变号，轮换不需变号，这正符合我们上一节提到的混合积的性质。三个向量线性相关时，矩阵的秩一定小于矩阵的维数，其行列式一定为零，所以混合积也为零，正如【**命题** 1.5.1】所述。

§1.5.3 二重向量积

【略】

§1.6 高维数组向量

前面几节我们的讨论基本限于三维向量空间，根据仿射坐标系，我们可以将向量表示为一组数，三维空间中，我们可以用三个数的数组来表示向量，不妨将这种表示方式推广，我们便可以得到高维的数组空间。

定义 1.6.1 一个 n 维**数组向量** $\boldsymbol{a}$ 是一个有序的 n 元数组

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

其中 a_i 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的第 i 个**分量**。

多数情况下，三维或二维的向量是符合我们的几何直观的，将向量坐标化，我们就找出了二维三维向量的一个很重要的共性，即数组表示，由此我们将“向量”这一概念进行了推广，从而将我们无法想象的更高维的空间的向量用代数的方式表达了出来。将向量的概念抽象化了，也因此得出了很多有趣的结论。事实上，数学的研究过程就是如此，从具体出发，抽象本质，推广研究。

我们会根据需要将向量写成**行向量** $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 或**列向量**

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

的形式。

我们可以将之前得出的向量加法、数乘以及线性相关的性质套用在高维数组向量中，这里举例线性组合的推广

定义 1.6.2 给定一组 n 维数组向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ 及一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ ，称和式

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m$$

为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ 的**线性组合**，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 为**组合系数**。

如果 $\boldsymbol{a}$ 可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ 的线性组合，则称 $\boldsymbol{a}$ 可以用 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ **线性表示**。

用 $\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量为 1 其余分量都为 0 的 n 维数组向量被称为**基本向量**，不难发现，所有的 n 维数组向量都可以由基本向量线性表示。

笔者在学习线性代数的过程中总是分不清“数组向量”和“向量组”的概念，觉得线性代数在表示向量时非常抽象，事实上只要分清楚这几个概念，搞懂向量的几种表达方式上的区别，就能很好地解决这一问题。例如对于一个三维空间中的向量 $\boldsymbol{a}$ 我们可以用坐标 (a_1, a_2, a_3) 来表示。假设三维空间中的基向量为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ，我们便可以将向量 $\boldsymbol{a}$ 表示为基向量的线性组合的形式即 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ ，这里其实应该是先有基向量的线性组合，再有坐标表示，笔者为了方便理解，就先从我们中学学过的坐标表示入手了。

§1.7　复数

§1.7.1　复数的四则运算

【略】

§1.7.2　复数的几何表示

我们知道复数 $z = x + iy$ 可以在复平面内用 (x, y) 这样一个点来表示，也可以表示为复平面内的一个二维的向量。

复数的模长 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。在复平面内，将向量 (x, y) 看作是长度为 r 的线段从 $y = 0$ 开始逆时针旋转至与 (x, y) 重合，所经过的角度 θ 称为复数的**幅角**，记作 $\arg z$（图 1.3）。复数的辐角不唯一，我们一般取 $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$ 为辐角的**主值**。规定复数 $z = 0$ 的辐角是不定的。

根据这个几何定义我们可以看看共轭复数。从几何上看，互为共轭的两个复数关于实轴对称，因此有 $|\overline{z}| = |z|, \quad \arg \overline{z} = 2\pi - \arg z$ ，并得出以下几组关系

$$|z|^2 = z\overline{z}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

知道了复数模 r 与辐角 θ 的关系，我们便可以写出复数的**三角表示**

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

从而得出复数的乘法

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right)$$

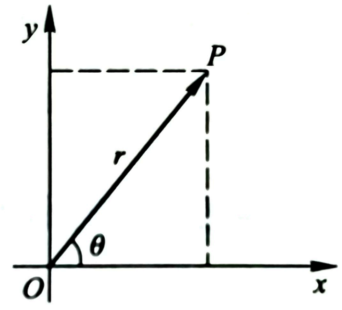

图 1.3: 复数的几何定义

推出

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$
$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

即复数乘积的模长等于复数模长的乘积，复数乘积的辐角等于复数辐角的和。由此可以得出复数乘法的**几何解释**。

设复数 $\omega = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ，则复数 $\omega \cdot z$ 表示**将复数 z 对应的向量模长伸缩 r 倍，再逆时针旋转 θ 角**。因此利用复数可以很好地表示旋转变换（之后章节）。

复数的三角表示还可以根据 Eular 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

得出

$$z = re^{i\theta}$$

表示模长为 r 辐角为 θ 的复数。

这样表示似乎把复数表示成了指数函数的形式，有趣的是，复数也刚好可以用指数函数的方式运算

$$r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

由此得出 De Moivre 公式

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}, \quad n \in Z$$

复数的运算在电学中常常用到，常用复数表示交流电压或电流，上面介绍的几种表示方式可以大大简化交流电学计算当中对于电流（或电压）的有效值和相位差的计算。

§1.8 数域

引理 1.8.1 设 F 为一个**数集**，若满足对于 $\forall a,b \in F$ 对 a,b 做某种运算后的结果仍在 F 中，则称数域 F 对这种运算是**封闭的**。

例如，实数集对于加法运算都是封闭的，因为任意两个实数的和一定还是实数。

定理 1.8.1 设数域 F 中至少包含两个不同元素，如果 F 对数的加、减、乘、除四则运算都是封闭的，那么称 F 为**数域**。

例如，实数集对于加减乘除四则运算都是封闭的，因此实数集也是一个数域，称为**实数域**。类似的还有**复数域** C 和**有理数域** Q 。

这一节引入数域这一概念是为后面研究线性空间、n 维数组空间以及线性变换等内容做铺垫。

§1.9 求和符号

【略】

至此，本章的内容基本完结，主要介绍了线性代数学习的前置知识点。从向量出发，以三维空间中的向量为基本，介绍了向量的物理意义和基本运算逻辑并引入了内外积的概念；接着通过坐标系的建立，将向量抽象为数组，使得这一物理量能够用数学的代数方法来表达，从而有了将之推广至高维的理论基础。除此之外，我们还由二三维空间中向量的共线共面问题推广出了线性相关这一概念，这一概念在后续章节的学习中至关重要，是探讨线性空间维数的一个重要指标。

第二章　空间解析几何

第三章　线性方程组

线性代数其实研究的就是线性方程组的解，我们有以下几个基本问题需要解决，也正是这门课的讨论顺序：

(1) 线性方程组是否有解？如果有解，有多少个解？

(2) 如何求解线性方程组？

(3) 解的表示方法？

(4) 解集的几何结构？

(5) 线性方程组的解能够解决怎么样的实际问题？（可行解问题）

关于线性方程组的各种术语名称我就不做介绍了，只说一个比较有趣的点即为什么线性方程组要叫做“线性”方程组，这是因为线性方程组在方程的加法和数乘定义下满足线性性（在第五章有介绍）。我们定义方程组的加法是对应项的系数相加如

$$
\begin{aligned}
&(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4) + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_4) \\
&= [(x_1 + b_1)\,x_1 + (a_2 + b_2)\,x_2 + (a_3 + b_3)\,x_3 = a_4 + b_4]
\end{aligned}
$$

不难发现方程组对于加法封闭，同理规定数乘是将所有的系数与数相乘，发现方程组对于数乘封闭，因此方程组满足线性性，所以我们称其“线性方程组”。

§3.1　Gauss 消元法

所谓 Gauss 消元法，其实就是利用以下三种**初等变换**

(1) 交换两个方程　$(i) \leftrightarrow (j)$

(2) 某个方程乘一个非零常数　$\lambda\,(i)$

(3) 某个方程乘一个非零常数加到另一个方程中　$\lambda\,(i) \to (j)$

将方程化简称**倒三角**的形式，以方便我们得到方程的解。此外，我们已经证明了对方程组做初等变换得到的新方程组与原方程组**同解**，也就是说**初等变换不会产生增根**，具体证明本笔记不做说明。

一般的方程组我就不多举例，接下来介绍两个例子来引出线性方程组解的**向量表示**和非齐次线性方程组的无解情况（也称为“方程组不相容”）。

例 3.1.1 求解下列线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3 \\ x_1+2x_2+ \qquad -5x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3-19x_4=6 \\ 3x_1+6x_2-3x_3-24x_4=7 \end{cases}$$

解 利用**初等变换**，我们将原方程组变换为了以下形式：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3 \\ \qquad\qquad -3x_3-9x_4=4 \end{cases}$$

到这里我们发现，四个未知数两个方程，表明该方程组有**无穷多解**，我们通常将某些未知数用**参数表示**。由这两个方程我们发现 x_1,x_2 中有一个可以随意取值，x_3,x_4 中有一个可以随意取值，不妨设 $x_2=t_1,\quad x_4=t_2$ ，我们便解出 $x_1=1-2t_1+5t_2$,
$x_3=-\frac{4}{3}-3t_2$ 从而得出原方程的解

$$\begin{cases} x_1=1-2t_1+5t_2 \\ x_2=t_1 \\ x_3=-\frac{4}{3}-3t_2 \\ x_4=t_2 \end{cases}$$

此外我们还可以将方程的解写成**向量形式**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

在上述例子中，我们介绍了含参变量的线性方程的解并将其写成了列向量的线性组合的形式，组合系数分别为 $t_1,t_2,1$ ，这样写的目的是在之后研究线性方程组解集的

几何结构时能更好地描述解空间这一概念，这里只做一点小小的引导，读者可以自行思考。我们知道三维空间中三个线性无关的向量组通过线性组合的形式可以表示三维空间中的任意向量，从而张成一整个三维空间，同理，当我们把线性方程组的解写成向量的线性组合的形式时，这些向量一旦满足某些条件，是否也能够张成一个空间呢？这样的空间与原方程组是否有什么特殊联系？这些问题都将在后面的学习中被一一解答。

下面我们举一个方程组**无解**的例子。

例 3.1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

解 利用**初等变换**，我们可以将原方程组化简成如下形式

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\qquad -x_3 = 2 \\ \qquad\qquad\ \ 0 = -2 \end{cases}$$

最后一个方程 $0 = -2$ 显然是一个矛盾方程，因此原方程组**无解**。

从这个例子我们能发现，只有非齐次线性方程组才可能出现矛盾的情况，也就是说，齐次线性方程组一定有解，最易得的就是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，但是这样的解并没有什么实际意义，我们称之为齐次线性方程组的平凡解，我们感兴趣的是齐次线性方程组的非平凡解。

§3.2 Gauss 消元法的矩阵表示

为了方便记法，我们常用矩阵的形式来写线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称上式等号右边的矩阵为左边的线性方程组的**增广矩阵**，也可以对该矩阵做**初等变换**，具体内容本节不再赘述。

采用矩阵来表示线性方程组的好处除了简便之外，还体现了线性方程组更本质的意义，即向量组。我们将线性方程组的未知数 $\{x_i\},\quad i=1,2,\dots,n$ 看成一个由 n 个向量组成的向量组，那么每个方程就是这个向量组的一个线性组合，用本节开头的那个线性方程组为例，一共有 m 个这样的线性组合，$b_i,\quad i=1,2,\dots,m$ 就是由 $\{x_i\}$ 表示出来的 m 个向量，如此整个线性方程组其实就是一个由 m 个向量组成的向量组。之后学习矩阵的乘法时会频繁用到这种理解。

§3.3 一般线性方程组的 Gauss 消元法

§3.3.1 算法描述

设有一个线性方程组如下（增广矩阵）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

根据**初等变换**，我们可以将第一行乘 $\frac{1}{a_{11}}$ 由此使得 a_{11} 变换为 $a_{11}^{(1)}=1$ 然后将第一行分别乘 $a_i,\quad i=2,3,\dots,m$ 使得第一列除了 $a_{11}^{(1)}=1$ 之外都为 0 ，再将第二行第二个数变为 1 ，然后借由前一步的方法将 $a_{i2},\quad i=3,4,\dots,m$ 消为 0 。如此类推，就可以将原方程组化简为如下形式

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{2,j_2-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上面这个矩阵看着复杂，事实上就是利用初等变换将矩阵化为倒三角形式的过程，

只是这里写出了它的最一般的结果。之所以如此大费周章地用这样一个矩阵来表示 Gauss 消元法的一般结果，只是为了下一节讨论线性方程解的属性能够比较方便。

§3.3.2 线性方程组解的属性

利用上节导出的 Gauss 消元法结果的一般形式，我们可以总结出线性方程组解的性质。

定理 3.3.1 线性方程组的解的性质如下：

(1) 当 $d_{r+1} \neq 0$ 时，线性方程组无解；(**【例** 3.1.2**】**中的 $0 = -2$)

(2) 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$ 时，线性方程组有唯一解；（可以理解为方程组最简时满足 n 个未知数 n 个方程，解唯一）

(3) 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r < n$ 时，线性方程组有无穷多解。(方程数小于未知数**【例** 3.1.1**】**)

上述定理还印证了之前章节提到的只有非齐次线性方程组才会出现无解的情况，因为只有非齐次线性方程组可能存在 $d_{r+1} \neq 0$ 的情况。

另外，我们把**【例** 3.1.1**】**得出的带有参变量的解叫做方程组的**通解**，将参变量带入某些具体数值后得到的解依然满足方程组，我们称这样的解为线性方程组的**通解**。

根据齐次方程组的一些特性，我们还可以延伸出以下几个推论。

推论 3.3.1 齐次线性方程组有**非平凡解**的充要条件为 $r < n$ 。

当齐次线性方程组的 $r = n$ 时，该方程组有唯一解，显然这个解一定是**平凡解**。(我们说齐次线性方程组一定有一个平凡解，所以当它只有一个解的时候，这个解一定时平凡解)

推论 3.3.2 若**齐次**线性方程组的行数小于列数，则方程组一定有**非平凡解**。

证明 设齐次方程组的行数为 m ，列数为 n ，我们有 $r \leqslant m < n$ ，则根据**【推论** 3.3.1**】**，该方程组一定有**非平凡解**。

第三章的内容到此结束，在本章我们已经解决了 (1) 解的存在唯一性；(2) 求解的方法以及通解的表达形式这两个问题。我们还发现，在判断方程组解的存在唯一性时有一个至关重要的衡量指标 r ，由此我们又将提出以下几个问题：

(1) 如何从原方程组直接确定 r ？

(2) r 是否唯一？

(2) 解集与 r 的关系？

这些疑问将在后续章节解答。